Verfahren zur Parametrisierung von Markoffschen Zustandsmodellen zur Mobilitätsmodellierung

ITG Workshop 5.2.1 und 5.2.4.

24.3.2006, München

Dr.-Ing. Michael Schopp
Siemens AG

basierend auf eigenen Arbeiten am IKR, Univ. Stuttgart.

Bereits mehrfach (in breiterem Kontext) veröffentlicht:

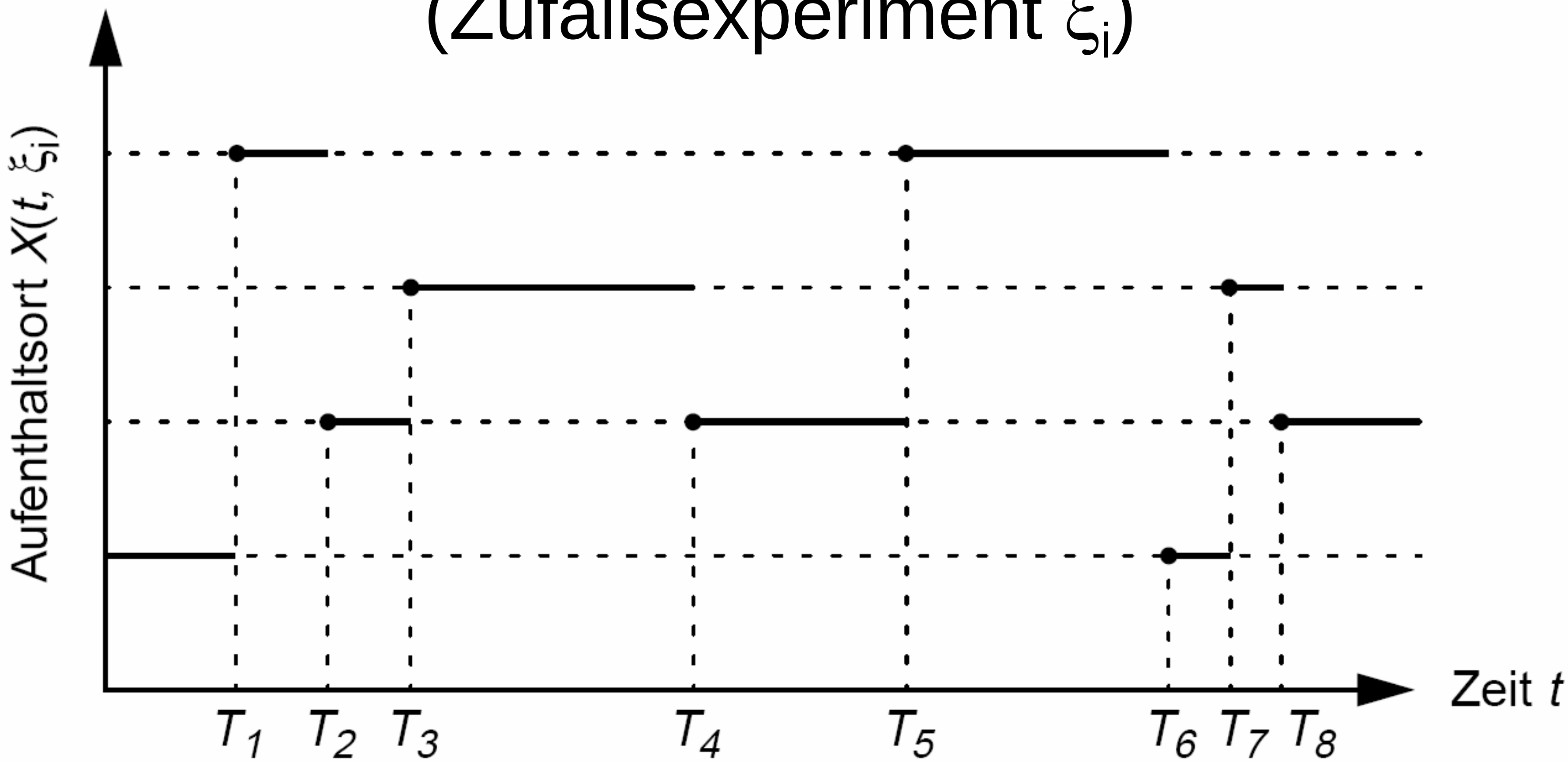
- Schopp/Mayer: ITC Specialist Seminar, Yokohama 1998
- Schopp: Location management in a multi-NetOp environment, Telecommunication Systems, Vol. 15.1-2, November 2000
- Dissertation Schopp (Mobilität in Kommunikationsnetzen …)

Gliederung

- Einführung
- Die Problemstellung
- Der „Trick“
- Der Beweis
- Das Verfahren

Bewegung als diskreter stochastischer Prozess

(Zufallsexperiment ξ_i)



Homogener Markoffscher oder Semi-Markoffscher Zustandsprozess.

BACKUP

Beschreibung
des homogenen stationären Semi-Markoffschen Zustandsprozesses

$$Q_{u,v}(t) = P\left\{ X_{n+1} = v,\ T_{n+1} - T_n \le t \;\middle|\; X_n = u \right\}$$

$$p_{u,v} = \lim_{t \to \infty} Q_{u,v}(t)$$

$$F_{u,v}(t) = \frac{Q_{u,v}(t)}{p_{u,v}}$$

$$f_{u,v}(t) = \frac{1}{p_{u,v}} \cdot \frac{d}{dt} Q_{u,v}(t)$$

Markoffscher Zustandsprozess:

$$F_{u,v}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu_u \cdot t}$$

$$1/\mu_{u,v} = \int_0^{\infty} \tau \cdot f_{u,v}(\tau)\, d\tau$$

Charakterisierung
des homogenen stationären Zustandsprozesses

Zustandsraum: S (nur rekurrente Zustände)

Zustandsübergangsmatrix: $\mathbf{P} = [\,p_{u,v}\,]$

($p_{u,v}$ = bedingte Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand u nach Zustand v).

Für alle $u \in S$ gilt:

$$p_{u,u} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{v \in S} p_{u,v} = 1$$

Mittlerer Verweildauer im Zustand u :

$$1/\mu_u = \sum_{v \in S} p_{u,v} \cdot 1/\mu_{u,v}$$

Zustandswahrscheinlichkeit π_u (für t → ∞) mit:

$$\sum_{u \in S} \pi_u = 1$$

Globales statistische Flussgleichgewicht

„Fluss“ von u nach v : $\phi_{u,v} = \pi_u \cdot \mu_u \cdot p_{u,v}$

„Fluss“ aus Zustand u :

$$\phi_u = \sum_{v \in S} \phi_{u,v} = \sum_{v \in S} \pi_u \cdot \mu_u \cdot p_{u,v} = \pi_u \cdot \mu_u$$

Statistisches Flussgleichgewicht für Zustand u bei stationären Zustandsprozessen:

$$\sum_{v \in S} \phi_{u,v} = \sum_{v \in S} \phi_{v,u}$$

$$\pi_u \cdot \mu_u = \sum_{v \in S} \pi_v \cdot \mu_v \cdot p_{v,u} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\phi_u = \sum_{v \in S} \phi_v \cdot p_{v,u}}$$

Matrix-Form
(für alle N Zustände)

$$\underline{\phi} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\phi} \qquad (1)$$

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \cdots \\ \phi_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & p_{2,1} & \cdots & p_{N,1} \\ p_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & p_{N,N-1} \\ p_{1,N} & \cdots & p_{N-1,N} & 0 \end{bmatrix}$$

Analog: $\underline{\pi}$ und $\underline{\mu}$

Problemstellung: Parametrisierung eines (Semi-)Markoffschen Zustandsmodells

Der Zustandsprozess wird bestimmt durch:
$\underline{\pi}$, $\underline{\mu}$ und $\mathbf{P}$, wobei $\underline{\phi} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\phi}$ erfüllt sein muss.

Praktische Probleme bei der Parametrisierung eines Zustandsmodells zur Mobilitätsmodellierung:

- Existierende Vorgaben zu Aufenthaltsdauern, Aufenthaltswahrscheinlichkeiten und Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. –raten reichen nicht aus, um das Modell vollständig zu definieren.
- Konsistente Definition aller Parameter ist mühsam.
- Parameterstudien benötigen Templates zur Erzeugung verschiedener Modelle mit einfach zu parametrisierender unterschiedlicher Charakteristik.

Beispiel 1a

Vorgabe:

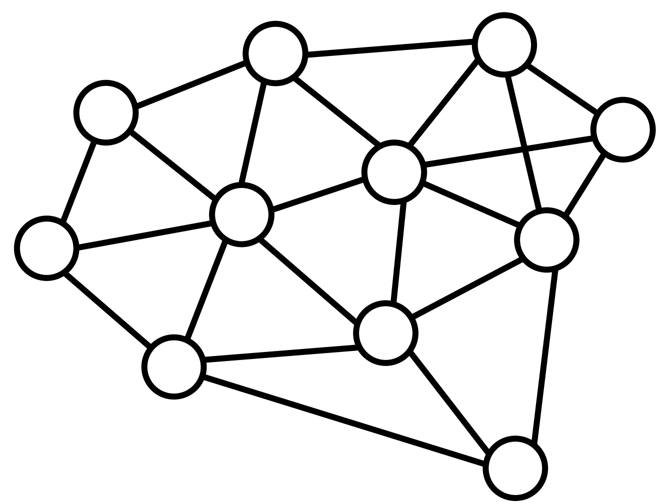
– Aufenthaltwahrscheinlichkeiten (π_u)

– Bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten ($\mathbf{P}$)

– Mittlerer globaler Zustandswechselrate (Σ_ϕ)

definiert das Modell vollständig.

Aber: Bestimmung der ϕ_u bzw. $1/\mu_u$ ist aufwändig



$$\Sigma_\phi = \sum \phi_u$$

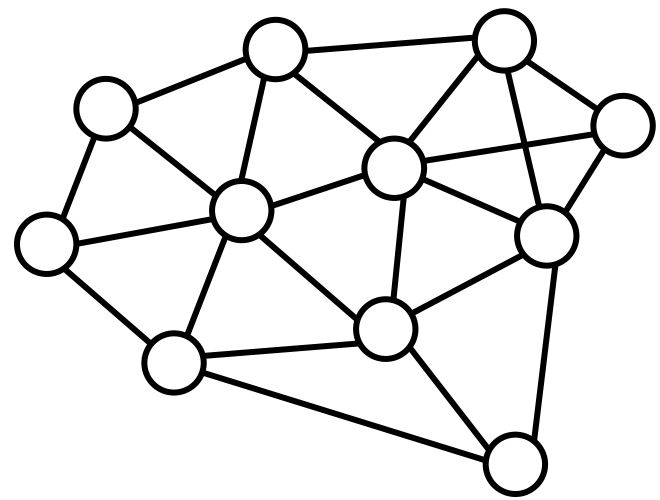
Beispiel 1b

Vorgabe:

- Mittlere Aufenthaltsdauern ($1/\mu_u$)
- Bedingte Übergangswahrscheinlichkeiten ($\mathbf{P}$)

definiert das Modell vollständig.

Aber: Bestimmung der ϕ_u bzw. π_u ist aufwändig



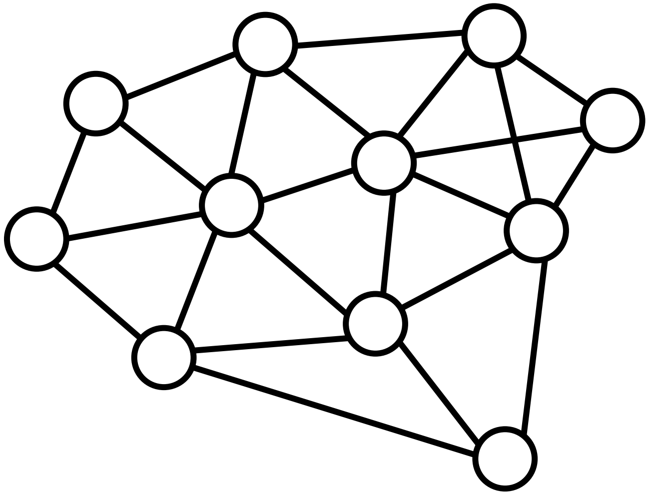
Beispiel 2

Vorgabe:

- Aufenthaltwahrscheinlichkeiten (π_u)
- Nachbarschaftsbeziehungen (→ bestimmte $p_{u,v} = p_{v,u} = 0$)
- Mittlere globaler Zustandswechselrate (${}^{\Sigma}\phi$)

reicht in der Regel nicht aus, um das Modell vollständig zu definieren.

$$ {}^{\Sigma}\phi = \sum \phi_u $$

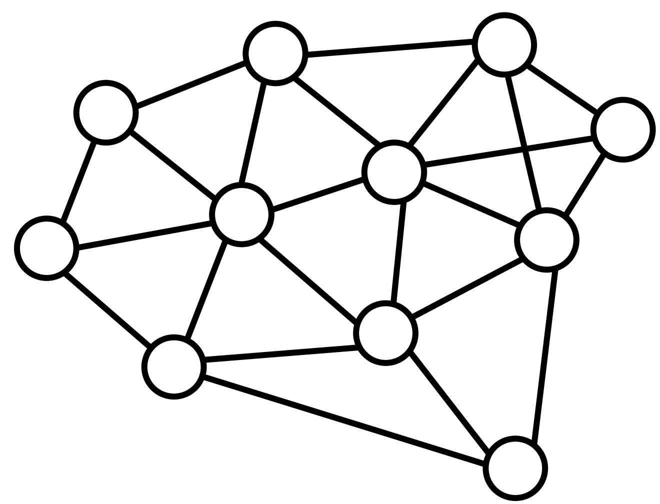


Beispiel 3

Vorgabe:

- Aufenthaltwahrscheinlichkeiten (π_u)
- Nachbarschaftsbeziehungen (→ bestimmte $p_{u,v} = p_{v,u} = 0$)
- Mittlere Aufenthaltsdauern ($1/\mu_u$)

birgt die Gefahr, das Modell über zu bestimmen (→ unlösbar).



Der „Trick“ (1/3)

Man wähle $\mathbf{P}$ so, dass

$$\underline{\phi} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\phi}$$

eine bekannte Lösung besitzt.

Folge:

– Beispiele 1a und 1b: Lösung sofort verfügbar, (wenn $\mathbf{P}$ passend gewählt wird).

– Beispiel 2: Freiheitsgrade können systematisch entfernt werden und Lösung ist sofort verfügbar.

– Beispiel 3: Minimierungsverfahren mit relativ wenigen Variablen kann angewandt werden, um ähnliche Parameter zu finden, für die das System lösbar wird.

Der „Trick“ (2/3)

Definition einer Nachbarschaftsmatrix $\mathbf{N}$ mit

$$n_{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{falls } u = v \\ 0 & \text{falls ein Übergang von } u \text{ nach } v \text{ nicht zulässig ist} \\ 1 & \text{falls ein Übergang von } u \text{ nach } v \text{ zulässig ist} \end{cases}$$

und: $n_{u,v} = n_{v,u}$

Setzen eines beliebigen Gewichtsfaktors $G_u > 0$ je Zustand und ableiten der $p_{u,v}$ daraus:

$$p_{u,v} = \frac{G_v \cdot n_{u,v}}{\sum_{w \in S} G_w \cdot n_{u,w}}$$

Der „Trick" (3/3)

Dann ergibt sich für $\underline{\phi} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\phi}$ die (skalierbare) Lösung:

$$\phi_u = G_u \cdot \sum_{w \in S} (G_w \cdot n_{u,w}) \qquad (2)$$

(was noch zu beweisen ist).

Und daraus: $\phi_{u,v} = G_u \cdot G_v \cdot n_{u,v}$,
was auch bedeutet, dass das System zeitreversibel ist ($\phi_{u,v} = \phi_{v,u}$), da $n_{u,v} = n_{v,u}$.

Der Beweis (1/3)

Zu beweisen: $\phi_u = G_u \cdot \sum_{w \in S} (G_w \cdot n_{u,w})$

Aus statistischem Flussgleichgewicht:

$$\phi_u = \sum_{v \in S} \phi_v \cdot \frac{G_u \cdot n_{v,u}}{\sum_{w \in S} G_w \cdot n_{v,w}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\phi_u}{G_u} = \sum_{v \in S} \frac{\phi_v \cdot n_{v,u}}{\sum_{w \in S} G_w \cdot n_{v,w}}$$

Substitution: $\phi_u^* = \dfrac{\phi_u}{G_u \cdot \sum_{w \in S} G_w \cdot n_{u,w}}$

Der Beweis (2/3)

Substitution führt zu:

$$\phi_u^* \cdot \sum_{w \in S} G_w \cdot n_{u,w} = \sum_{v \in S} \phi_v^* \cdot G_v \cdot n_{v,u}$$

Was umgeschrieben werden kann zu:

$$\underline{\phi}^* = \mathbf{G} \cdot \underline{\phi}^* \qquad (3)$$

mit:

$$g_{u,v} = \frac{G_v \cdot n_{v,u}}{\sum_{w \in S} G_w \cdot n_{u,w}}$$

Der Beweis (3/3)

Die Zeilensummen von $\mathbf{G}$ ergeben unter Verwendung der Symmetrie von $\mathbf{N}$:

$$\sum_{v \in S} g_{u,v} = \frac{\sum_{v \in S} G_v \cdot n_{u,v}}{\sum_{w \in S} G_w \cdot n_{u,w}} = 1$$

Dies bedeutet, dass $\mathbf{G}$ eine unzerlegbare (stochastische) Matrix ist, für die gilt, dass

$$\underline{\phi}^* = \underline{e} = (1, 1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$$

einziger (linear unabhängiger) EV von $\mathbf{G}$ zum Eigenwert 1 ist, und damit einzige Lösung von (3). Daraus folgt unmittelbar (2) – *q.e.d.*

Das Verfahren (1/3)

Verschiedene Wege zur Definition des gesamten Modells, je nach Art der Vorgaben, die der Modellierer machen will.

Verfahren 1a: (vgl. Beispiel 2 bzw. Beispiel 1a)

Vorgabe:

- Aufenthaltwahrscheinlichkeiten für alle Zustände
- Allen Nachbarschaftsbeziehungen
- Mittlerer globale Zustandswechselrate

Verbleibende Freiheitsgrade werden zur Festlegung der Gewichtsfaktoren für alle Zustände verwendet:

A) Alle Gewichte = 1

B) Alle Gewichte proportional zur Aufenthaltwahrscheinlichkeit

C) Beliebige Gewichte durch den Modellierer vorgegeben.

Ergebnis: Vollständig definiertes Modell und Kenntnis aller charakteristischen Größen ($\pi_u, \mu_u, \mathbf{P}, \phi_u, \phi_{u,v}$).

Das Verfahren (2/3)

Verfahren 1b: (vgl. Beispiel 1b)

Vorgabe:

- Alle Nachbarschaftsbeziehungen
- Je Zustand entweder Zustandswahrscheinlichkeit (π_u) oder mittlere Aufenthaltsdauer (1/ μ_u).

Vorgehen ansonsten wie bei Verfahren 1b, nur dass nicht auf die mittlerer globaler Zustandswechselrate skaliert wird, sondern folgende Bedingung erfüllt sein muss:

$$\sum_{u \in A} \pi_u + \sum_{u \in S-A} \phi_u / \mu_u = 1$$

Das Verfahren (3/3)

Verfahren 2: (vgl. Beispiel 3)

Vorgabe:

- Alle Zustandswahrscheinlichkeiten (π_u)
- Alle mittleren Aufenthaltsdauern ($1/\mu_u$)

Damit sind bereits alle Flüsse ϕ_u definiert, ohne dass klar ist, ob es ein $\mathbf{P}$ gibt, für das Gleichung (1) erfüllt wäre.

Ansatz: Reduzierung auf ein Minimierungsproblem mit N Variablen (N = Zahl der Zustände im System).

Suche (z.B. mittels numerischer Optimierung) Ersatzflüsse

$$\phi_u^\dagger = G_u \cdot \sum_{v \in S} G_v \cdot n_{u,v}$$

für die gilt:

$$\min \sum_{u \in S} \left(\frac{\phi_u^\dagger - \phi_u}{\phi_u} \right)^2$$

und berechne daraus Ersatzwerte $\pi_u^\dagger$ und/oder $\mu_u^\dagger$.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Dr.-Ing. Michael Schopp

Siemens AG
Com MN PG R S C 1
Lise-Meitner-Str. 7/2
89081 Ulm

E-mail: Michael.Schopp@siemens.com

SIEMENS